Las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos en la práctica docente

Héctor Mauricio Becerra Galindo
Doctorado en Educación DIE, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia
Grupo de investigación MESCUD (Matemáticas Escolares Universidad Distrital), Bogotá, Colombia
NRD (Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica), Universidad de Bologna, Italia

Abstract. *In this article, we present the semiotic problems of the representations of infinite sets used in teaching practice, which arises from the teaching and learning processes of the infinite sets, where students' difficulties with regard to their cognitive construction are highlighted. They are especially associate with the lack of semiotic consciousness (conscious knowledge about the systems of representations that are mobilized in mathematical activity) of teachers regarding the representations established in the teaching of the infinite sets. In order to address this difficulty, it is necessary to investigate and describe the semiotic problems of the representations of the infinite sets in the teaching practice and in the textbooks.*

Keywords: infinite sets, semiotic representation, teaching and learning.

Sunto. *In questo articolo si presenta la problematica semiotica nelle rappresentazioni di insiemi infiniti usate nella pratica di insegnamento, che nasce dai processi di insegnamento e apprendimento di insiemi infiniti, dove si evidenziano le difficoltà degli studenti per quanto riguarda la loro costruzione cognitiva. Ciò è legato soprattutto alla mancanza di coscienza semiotica (cioè la conoscenza cosciente dei sistemi di rappresentazioni che si mobilitano nell'attività matematica) degli insegnanti per quanto riguarda le rappresentazioni stabilite nell'insegnamento di insiemi infiniti. Per far fronte a questa difficoltà, è necessario indagare e descrivere il problema semiotico delle rappresentazioni di insiemi infiniti nell'insegnamento e nei libri di testo.*

Parole chiave: insiemi infiniti, rappresentazione semiotica, insegnamento e apprendimento.

Resumen. *En este artículo se presenta las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos presentadas en la práctica docente, que surge de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conjuntos infinitos, donde se evidencian dificultades en los estudiantes respecto a su construcción cognitiva. Esta temática está asociada especialmente a la falta de conciencia semiótica (es decir el conocimiento consciente sobre los sistemas de representaciones que se movilizan en la actividad matemática) de los profesores respecto a las representaciones establecidas en la enseñanza de los conjuntos infinitos. Para abordar esta dificultad, es necesario indagar y describir las problemáticas semióticas de las representaciones* *de los conjuntos infinitos a partir de la práctica docente y del análisis de los libros de texto.*

Palabras clave: conjuntos infinitos, representación semiótica, enseñanza y aprendizaje.

1. Premisa

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conjuntos infinitos se evidencia dificultades en los estudiantes respecto a su construcción cognitiva; estas dificultades están asociadas a la dificultad objetiva de los estudiantes frente a le temática del infinito (que constituye un obstáculo epistemológico)[1] como se concluye en las investigaciones de Fischbein, Tirosch y Hess (1979), Duval (1983), Moreno y Waldegg (1991), Arrigo y D'Amore (1999, 2002), Tsamir (2000), Arrigo, D'Amore y Sbaragli (2011), entre otros, y a la temática general de la formación de una noética frente a representaciones semióticas como es propuesto por Duval (1993, p. 38; la traducción es en D'Amore, 2002): "(…) de un parte, el aprendizaje de los objetos matemáticos sólo puede ser un aprendizaje conceptual y, de otra parte, es sólo a través de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos" (paradoja de Duval), y que es consolidado por Duval (1995, p. 15) con su hipótesis "no hay noesis sin semiosis".

También se asocian a la falta de conciencia semiótica en las representaciones elegidas por los profesores en la enseñanza y aprendizaje de los conjuntos infinitos. Esta dificultad se empieza a evidenciar cuando los profesores realizan las siguientes afirmaciones respecto a las representaciones de los conjuntos infinitos:

> Inv: (...) ¿Tú crees que los elementos que forman el conjunto de los enteros son más, menos o el mismo número de los elementos que tiene el conjunto de los naturales?
> C: Obviamente son más, están además todos los negativos.
> (...)
> Inv: ¿Esto lo presentas en clase?
> C: Por supuesto que digo que los números negativos siempre deben estar siempre antes de los positivos. (Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2011, p. 209)

Evidenciemos otro argumento de otro profesor al dar respuesta a la pregunta "¿Cuántos son los números naturales: 0, 1, 2, 3, …?":

> F: Los números naturales son infinitos, ya que un conjunto es infinito si está conformado por infinitos elementos y 0, 1, 2, 3, … son infinitos. (Arrigo,

[1] El obstáculo epistemológico se propone desde la definición dada por Brousseau (1983), quien establece que "es un conocimiento estable que funciona bien en ámbitos anteriores, pero que crea problemas y errores cuando se le intenta adaptar a nuevas situaciones" (Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2011, p. 135).

D'Amore, & Sbaragli, 2011, p. 215)

argumento que no presenta una construcción cognitiva correcta del objeto conjunto infinito,[2] pero que muestra claramente la interpretación que le está dando el profesor F a los puntos suspensivos en la representación 0, 1, 2, 3, … como los infinitos elementos que conforman el conjunto.

También se puede destacar que los profesores, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conceptos matemáticos, recurren a los textos escolares de matemática como referentes para su planeación y diseño de actividades, aunque algunos profesores, al desconocer estos conceptos matemáticos (infinito, conjunto infinito) desde la epistemología, la historia y la semiótica, solo los asocian a la transposición didáctica elegida por el autor de los libros de texto (Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2011).[3]

Estos elementos que se han evidenciado respecto a la conceptualización de los conjuntos infinitos por parte de los profesores a partir de la elección (que no es univoca ni neutra) de representaciones de los conjuntos infinitos en su enseñanza y aprendizaje, puede ser una causa de la falta de construcción cognitiva del objeto matemático conjunto infinito por parte de los alumnos. Por lo tanto, nos parece necesario estudiar y analizar con cuidado las problemáticas semióticas en las representaciones de los conjuntos infinitos presentadas en la práctica docente.

2. Marco teórico

En la investigación se analiza, desde la historia de la matemática, los registros de representación semiótica que aparecen en la definiciones, presentaciones o ilustraciones del concepto de los conjuntos infinitos en su aparición y evolución. Para realizar este análisis se tendrá como base los siguientes documentos: el primer capítulo del libro de Arrigo, D'Amore y Sbaragli (2011) y la historia de las matemáticas de Heath (1921), de Boyer (1986), de Campos (2008), entre otros estudiosos en este campo.

Es importante destacar que la epistemología y la historia son significativos para el desarrollo de la investigación en educación matemática, ya que "el trabajo pionero de Guy Brousseau (…) nos ha enseñado que, cuando se debe enfrentar la didáctica de un cierto argumento, es necesario entrar en confianza previamente con la historia del mismo y, mejor aún, con su epistemología" (Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2011, p. 10).

Con respecto a la didáctica del infinito, son numerosas las investigaciones porque sin duda esto es "uno de los temas más comunes, sobre todo porque se

---

[2] Conjunto infinito se puede definir como: "Un conjunto S se denomina infinito sí y solo sí se puede poner en correspondencia biunívoca con una de sus partes propias" (Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2011, p. 97). A esta definición se le da el nombre de Galileo – Dedekind.

[3] Se presentarán dos ejemplos de este hecho en el problema de investigación.

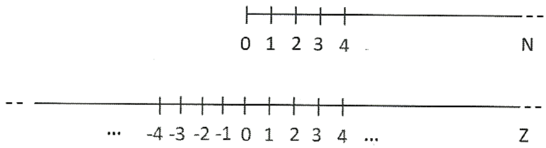
hace evidente, a los ojos de un observador competente, la forma en que el estudiante debe adaptar continuamente diferentes modelos y, en ocasiones, no lo logra” (Arrigo, D’Amore, & Sbaragli, 2011, p. 124), modelos que tampoco son desarrollados por los profesores. Por lo tanto, se profundizará sobre las convicciones de los profesores sobre el infinito, haciendo referencia a los trabajos de Arrigo, D’Amore y Sbaragli (2011), las representaciones semióticas de Duval (1995, 2006), Duval y Sáenz-Ludlow (2016) y de D’Amore, Fandiño Pinilla y Iori (2013), los obstáculos epistemológicos y didácticos de Arrigo y D’Amore (1999, 2002) y de Tsamir (2000), y los obstáculos epistemológicos y la perspectiva socio-cultural de la matemática D’Amore, Radford y Bagni (2007).

Por último, se examinará más detalladamente el concepto de convicción para generar una definición más clara y pertinente para los fines de la investigación; actualmente la convicción se aborda desde las concepciones como es propuesto por Azcárate, García y Moreno (2006), quienes señalan que las concepciones de los docentes consisten en la estructura que cada profesor de matemática da a sus conocimientos para posteriormente enseñarlos o transmitirlos a sus estudiantes, y no desde la creencia, que es el modo de conocimiento propio a la opinión (Duval, 2004). Pero es una definición que se debe detallar, a partir de los planteamientos propuestos por Ernest (1988), Grossman, Wilson y Shulman (1992), Ponte (1994), Ruíz-Higueras (1994), Moreno (2001), D’Amore y Fandiño Pinilla (2004), Pehkonen, Ahtee, Tikkanen y Laine (2011) y Bohórquez (2016).

3. Problema de investigación

En la práctica docente se evidencian dificultades en los estudiantes respecto a la construcción cognitiva de los conjuntos infinitos; éstas están asociadas a la misma construcción cognitiva de los estudiantes y la concepción errada de algunos profesores de matemática, causas que ya fueron temas de muchas investigaciones en el pasado, por lo cual nuestra atención se dirige sobre todo a la falta de conciencia semiótica en las representaciones elegidas por los profesores en la enseñanza de los conjuntos infinitos y a las interpretaciones que hacen los estudiantes de estas representaciones, como base de una reflexión crítica por parte de los profesores.

La dificultad que está asociada a la falta de conciencia semiótica sobre las representaciones establecidas en la enseñanza y aprendizaje de los conjuntos infinitos, se empieza a evidenciar cuando los profesores generan argumentos desde lo que ve en las representaciones y no desde la coordinación de registros de representaciones semióticas que son necesarias para la conceptualización (Duval, 1993) de los conjuntos infinitos; en este caso el profesor al ver las “siguientes representaciones gráficas habituales que llevan a pensar, tanto a los docentes como a los estudiantes, que el número de enteros es el doble del número de naturales” [o que el conjunto de los enteros tiene más elementos que el conjunto de los naturales]:



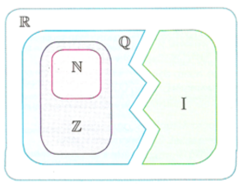
(Arrigo, D’Amore, & Sbaragli, 2011, p. 222).

Examinemos una nueva evidencia de otro profesor; cuando se le pregunta si hay más números pares o números naturales, el profesor responde: “A: (...) todos los números [naturales] 0, 1, 2, 3, … son el doble de los pares, porque faltan los impares” (Arrigo, D’Amore, & Sbaragli, 2011, p. 209), lo que genera el fenómeno de la dependencia, propuesto por Arrigo y D’Amore (1999) al concebir como verdad absoluta el concepto euclidiano “El todo es mayor que la parte”; en este caso vemos nuevamente una problemática con la representación y conceptualización de los conjuntos infinitos, ya que a una mayor longitud del segmento debe corresponder una mayor cardinalidad del conjunto de puntos (Fischbein, 1992, 2001).

Esta dificultad de la conciencia semiótica se agudiza más cuando el profesor al planear y diseñar actividades se encuentra con las siguientes definiciones en los libros de textos.

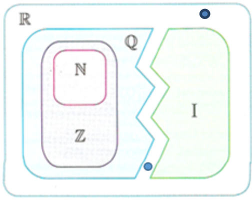
Definición en un libro para grado 8^0:

> Los números naturales ℕ, los enteros ℤ y los racionales ℚ, conforman, junto con los irracionales I, el conjunto de los números reales ℝ.
> Para entender cómo se relacionan los conjuntos de números mencionados, observemos el siguiente esquema:



(Dueñas Peña, Garavito Ramírez, & Lara De Méndez, 2008, p. 48)

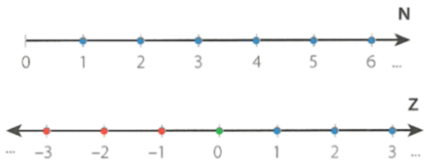
En esta grafica se puede establecer que hay problemas en la representación semiótica que generan la no asociación entre registros de representaciones y a su vez la no asociación de un registro de representación con el objeto matemático (Duval, 1995; Duval & Sáenz-Ludlow, 2016). La definición propuesta se ubica en el registro de la lengua natural, pero los autores presentan también el esquema que se ubica en una representación auxiliar. Y hay una evidente contradicción entre las dos representaciones semióticas.



Se propone un pasaje del registro de la lengua natural a una representación auxiliar; pero se puede observar que, en la representación auxiliar, no se representa lo que se establece en el registro de la lengua natural, ya que si ubicamos una representación hipotética de dos números (puntos evidenciados) en la representación auxiliar donde está la letra ℝ, se puede establecer que en esos lugares los números no pertenecen a ℚ, ni a I, entonces surge la siguiente pregunta: ¿Qué número se representaría en este lugar? Por lo tanto, lo que tenemos en este ejemplo es un problema con la representación auxiliar, la cual no está representando fielmente el objeto matemático de los números reales, en otras palabras, no se está asociando al mismo objeto inaccesible (Duval, 1995, 2006; Duval & Sáenz-Ludlow, 2016); en este caso no existe una coordinación de registros (Duval, 1995, 2006; Duval & Sáenz-Ludlow, 2016).

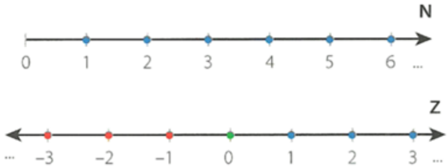
Definición en un libro para grado 11°:

El conjunto de los números naturales lo representamos con N y está formado por los números que se utilizan para contar, es decir, N = {1, 2, 3, …}. A partir de los números naturales es posible construir los números enteros Z agregando el 0 y los negativos de los números naturales. De esta forma obtendremos Z = {…, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …}.
Es posible representar estos números en la recta numérica como muestra la figura:



Al formar todos los posibles cocientes entre números enteros obtenemos el conjunto Q. Entonces $Q = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in Z, b \neq 0\right\}$. Los números racionales se caracterizan porque su expresión decimal es finita o infinita periódica. Aquellos números cuya expresión decimal es infinita no periódica forman el conjunto de los números irracionales I. Algunos ejemplos importantes de los números irracionales son: $\pi \approx 3{,}14159\ldots$, $e \approx 2{,}71828\ldots$
Los números reales son el conjunto formado por la unión de los números racionales y los irracionales $R = Q \cup I$. (Moreno Trujillo, Roldán Jiménez, & Romero Morales, 2011, p. 12)

En esta definición, se proponen las siguientes representaciones simbólicas: N = {1, 2, 3, …} y Z = {…, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, …}, y la siguiente representación gráfica (la línea de los números naturales y enteros):



En estas dos representaciones se presentan problemas en su representación; en los registros de representación simbólicas solo se presenta por parte de los autores del libro el orden "natural" de los números naturales y de los números enteros, lo que lleva a profesores y estudiantes a pensar que solo hay estas representaciones graficas posibles y correctas del orden de N y de Z, como lo afirma un profesor "estos números tienen que ordenarse siempre así" (Arrigo, D'Amore, & Sbaragli, 2011, p. 209). Además, puede ser sustentado desde la convicción de algunos profesores cuando dicen que N tiene una sola dirección hacia el infinito, mientras Z tiene dos direcciones, argumento que no es válido y que depende de cómo eliges el orden y de cómo lo representas.

Esta aceptación por parte de los profesores y estudiantes de una sola representación semiótica del orden que se considera único, con sus problemas de interpretación, dejan de lado la representación de otras formas de ordenar los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales. Por ejemplo, un orden del conjunto de los números naturales puede representarse así:
N = {…, 5, 4, 0, 1, 6, 8, …}, N = {0, 3, 7, 2, …}.
Los números enteros se pueden ordenar de las siguientes formas:
Z = {0, 1, –1, 2, –2, 3, –3, …}, Z = {0, –1, 1, –2, 2, –3, 3, …},
Z = {…, –3, 0, –2, 1, –1, 3, 2, …}, etc.

En estas definiciones, los autores de los libros usan el término de infinito, pero se le deja al profesor, al estudiante o al lector su conceptualización de forma intuitiva. Además, esto se puede evidenciar cuando se presentan la representación de los números naturales y enteros, así: N = {1, 2, 3, 4, 5, …}, Z = {…, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, …}, y los ejemplos propuestos de los números racionales e irracionales, así: 5,424424442…, π ≈ 3,14159…, 0,333…

Desde estas representaciones, surgen las siguientes preguntas de reflexión: ¿Cómo los estudiantes interpretan los puntos suspensivos de la representación del conjunto de los números naturales, enteros y de los ejemplos de los números racionales e irracionales?, ¿Qué interpretación tienen los puntos suspensivos para los estudiantes con respecto al infinito?

Con respecto al tema de los conjuntos infinitos, surgen las siguientes preguntas: ¿Qué representación se propone en los libros de texto y en las cátedras de un conjunto infinito?, más aún: ¿Qué papel tiene la representación semiótica en todo esto?, ¿Cómo se pasa de la semiosis a la noesis? y ¿Cómo se puede interpretar en estas circunstancias la paradoja cognitiva de Duval?

A partir de las dificultades que están asociadas a la falta de conciencia semiótica sobre las representaciones establecidas en la enseñanza de los conjuntos infinitos y desde las convicciones presentadas por los profesores de los conjuntos infinitos, se plantea la siguiente pregunta de investigación.

¿Cómo los profesores cambian su convicción sobre la representación semiótica de los conjuntos infinitos a partir de los resultados de entrevistas hechas a estudiantes en las cuales se manifiestan faltas de construcción cognitiva del objeto "conjunto infinito" debido a las elecciones semióticas del profesor mismo?

4. Descripción de la metodología

Este trabajo se encuentra enmarcado en un enfoque de investigación cualitativa, de tipo descriptivo-comparativo, entendiendo el sentido de la primera como la que "describe características de un conjunto de sujetos o áreas de interés" (Tamayo, 2001, p. 66) y de la segunda como: "la actividad de la razón que ponen en correspondencia unas realidades con otras para ver sus semejanzas y diferencias" (Sierra Bravo, 1994, p. 161). Desde estas perspectivas, se pretende identificar, describir y analizar las causas del cambio de convicción de los profesores relativo a la elección de representaciones en la enseñanza de los conjuntos infinitos a través de entrevistas hechas a sus estudiantes, ya que éstas permiten comparar las realidades de lo aprendido por parte de los estudiantes y lo enseñado por parte de los profesores del objeto matemático conjuntos infinitos a partir de la elección de representaciones.

Para establecer las causas del cambio de convicción de los profesores, se tendrá en cuenta la siguiente opción metodológica:

1. Se observará y grabará la elección de las representaciones semióticas utilizadas por el profesor para la enseñanza de los conjuntos infinitos (objeto matemático profesor) y se comparará con el objeto matemático conjunto infinito que es construido y declarado por los estudiantes en su entrevista.
2. A partir de la comparación, se tomarán las frases y fragmentos de video de las respuestas de los estudiantes, que evidencien la no construcción cognitiva del objeto matemático conjunto infinito a partir de la elección de representaciones semióticas propuestas por el profesor.
3. En la entrevista al profesor, se le harán preguntas relacionadas a esta elección de representaciones semióticas para la enseñanza de los conjuntos infinitos y se le mostrarán las respuestas de los estudiantes (fragmentos de video y frases), a partir de estas dos acciones en la entrevista, es que se pueden evidenciar las posibles causas del eventual cambio de las convicciones de los profesores sobre las representaciones semiótica

utilizada para la enseñanza de los conjuntos infinitos.

5. Hipótesis

La conjetura que se establece para esta investigación es la conceptualización de los conjuntos infinitos por parte de los estudiantes, a partir del conocimiento consciente sobre los sistemas de representaciones que se movilizan en la actividad matemática (conciencia semiótica) generado por el profesor y que se evidencia en la elección de las representaciones utilizadas para la enseñanza y aprendizaje los conjuntos infinitos.

6. Conclusiones

Estos problemas que se presentan en las representaciones, aunque hayan sido evidenciados por las investigaciones en didáctica de la matemática, se siguen presentando con profesores que actualmente están en ejercicio y en formación; por lo tanto, es muy importante generar un cambio en la conciencia semiótica sobre la elección de las representaciones utilizadas en la enseñanza de los conjuntos infinitos.

Se destaca como elemento importante en la relación con las problemáticas semióticas de la representación semiótica de los conjuntos infinitos, el estudio y análisis crítico que se debe realizar a los registros de representación semiótica en los textos escolares y universitarios, y a las prácticas docentes al enseñar los conjuntos infinitos, ya que: "la comprensión conceptual, la diferenciación y el dominio de las diferentes formas de razonamiento (...) están íntimamente ligados a la movilización y a la articulación cuasi-inmediatas de algunos registros de representación semiótica" (Duval, 1995, p. 18).

Los resultados que se esperan de esta investigación son: a) caracterizar los diferentes registros semióticos de representación de los conjuntos infinitos a partir de las prácticas docentes, b) justificar la elección del profesor sobre los diferentes registros semióticos utilizados en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los conjuntos infinitos y c) evidenciar la necesidad de actualización de los profesores respecto a la didáctica del infinito y específicamente de las representaciones semióticas de los conjuntos infinitos.

Referencias bibliográficas

Arrigo, G., & D'Amore, B. (1999). "Lo veo, pero no lo creo": Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual. *Educación matemática*, *11*(1), 5–24.

Arrigo, G., & D'Amore, B. (2002). Otros hallazgos sobre los obstáculos epistemológicos y didácticos en el proceso de comprensión de algunos teoremas de Georg Cantor. *Educación matemática*, *16*(2), 5–20.

Arrigo, G., D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Infiniti infiniti.* Trento, Italia: Erickson. [Versión en idioma español: Arrigo, G., D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2011). *Infinitos infinitos*. Bogotá: Magisterio].

Azcárate, C., García, L., & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, *9*(1), 85–116.

Bohórquez, L. Á. (2016). *Cambio de concepciones de un grupo de futuros profesores de matemáticas sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en un ambiente de aprendizaje fundamentado en la resolución de problemas*. (Tesis doctoral laureada en curso de publicación, director Bruno D'Amore). Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Boyer, C. B. (1968). *A history of mathematics*. New York, NY: Wiley. [Versión en idioma español: Boyer, C. B. (1986). *Historia de la matemática*. Madrid, España: Alianza Editorial].

Brousseau, G. (1983). Obstacles épistémologiques en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, *4*(2), 165–198.

Campos, A. (2008). *Introducción a la historia y a la filosofía de la matemática*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

D'Amore, B. (2002). La complejidad de la noética en matemáticas como causa de la falta de devolución. *TED*, 11, 63–71.

D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2004). Cambios de convicciones en futuros profesores de matemática de la escuela secundaria superior. *Espilon*, 58, 23–44.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., & Iori, M. (2013). *La semiótica en la didáctica de la matemática.* Bogotá: Magisterio.

D'Amore, B., Radford, L., & Bagni, G. T. (2007). *Obstáculos epistemológicos y perspectiva socio-cultural de la matemática*. Colección Seminario en Educación de la Universidad Nacional de Colombia (Vol. 10). Bogotá: Corcas Editores Ltda.

Dueñas Peña, W. H., Garavito Ramírez, A. A., & Lara De Méndez, G. E. (2008). *Aciertos matemáticos 8: Serie para educación básica secundaria*. Bogotá: Educar Editores S.A.

Duval, R. (1983). L'obstacle du dédoublement des objets mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(4), 385–414.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*(1), 37–65.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensé humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne: Peter Lang. [Versión en idioma español: Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega, Trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle].

Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo* (M. Vega, Trad.). Cali: Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1–2), 103–131.

Duval, R., & Sáenz-Ludlow, A. (2016). *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: Perspectivas semióticas seleccionadas*. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Ernest, P. (1988). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. En P. Ernest (Ed.), *Mathematics Teaching: The State of the Art* (pp. 249–254). Londres, Reino Unido: Falmer Press.

Fishbein, E. (1992). Intuizione e dimostrazione. En E. Fischbein, G. Vergnaud, & B. D'Amore (Eds.), *Matematica a scuola: Teorie ed esperienze* (pp. 1–24). Bolonia, Italia: Pitagora.

Fishbein, E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2–3), 309–329.

Fishbein, E., Tirosch, D., & Hess, P. (1979). The intuitions of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *10*(1), 3–40.

Grossman, P. L., Wilson, S. M., & Shulman, L. S. (1989). Teachers of substance: Subject matter knowledge for teaching. En M. C. Reynolds (Ed.), *Knowledge base for the beginning teacher* (pp. 23–36). Oxford, Inglaterra: Pergamon Press.

Heath, T. (1921). *A history of Greek mathematics* (Vols. I, II). Oxford, Inglaterra: Oxford University Press.

Moreno, L., & Walddeg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Education Studies in Mathematics*, *22*(3), 211–231.

Moreno, M. M. (2001). *El profesor universitario de matemáticas: Estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales* (Tesis doctoral). Bellaterra, Barcelona: Universidad Autónoma de Barcelona.

Moreno Trujillo, J. F., Roldán Jiménez, D. G., & Romero Morales, F. E. (2011). *Matemáticas para pensar 11*. Bogotá: Editorial Norma S.A.

Pehkonen, E., Ahtee, M., Tikkanen, P., & Laine, A. (2011). Pupils' conceptions on mathematics lessons revealed via their drawings. En B. Rösken & M. Casper (Eds.), *Current state of research on mathematical beliefs XVII: Proceedings of the MAVI-17 Conference* (pp. 182–191). Bochum, Alemania: Universidad Ruhr de Bochum.

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge. En J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. I, pp. 195–210). Lisboa, Portugal.

Ruíz-Higueras, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico*. Granada, España: Universidad de Granada.

Sierra Bravo, R. (1994). *Técnicas de investigación social: Teoría y ejercicios*. Madrid, España: Paraninfo.

Tamayo, M. (2001). *El proceso de la investigación científica.* Ciudad de México, México: Limusa.

Tsamir, P. (2000). La comprensione dell'infinito attuale nei futuri insegnanti. *La matematica e la sua didattica*, *14*(2), 167–207.